M. Topolánek ~ 2008:

- 14:00 diskuse na ČT v Praze
- 15:20 tenisový zápas (žen) v Brně

s ... 200 km $\qquad t = 80 \text{ min} = \frac{4}{3}\,h$

$\bar{v}$ ... průměrná rychlost: $\bar{v} = \dfrac{200 \text{ km}}{\frac{4}{3}\,h} = 150 \text{ km}h^{-1}$

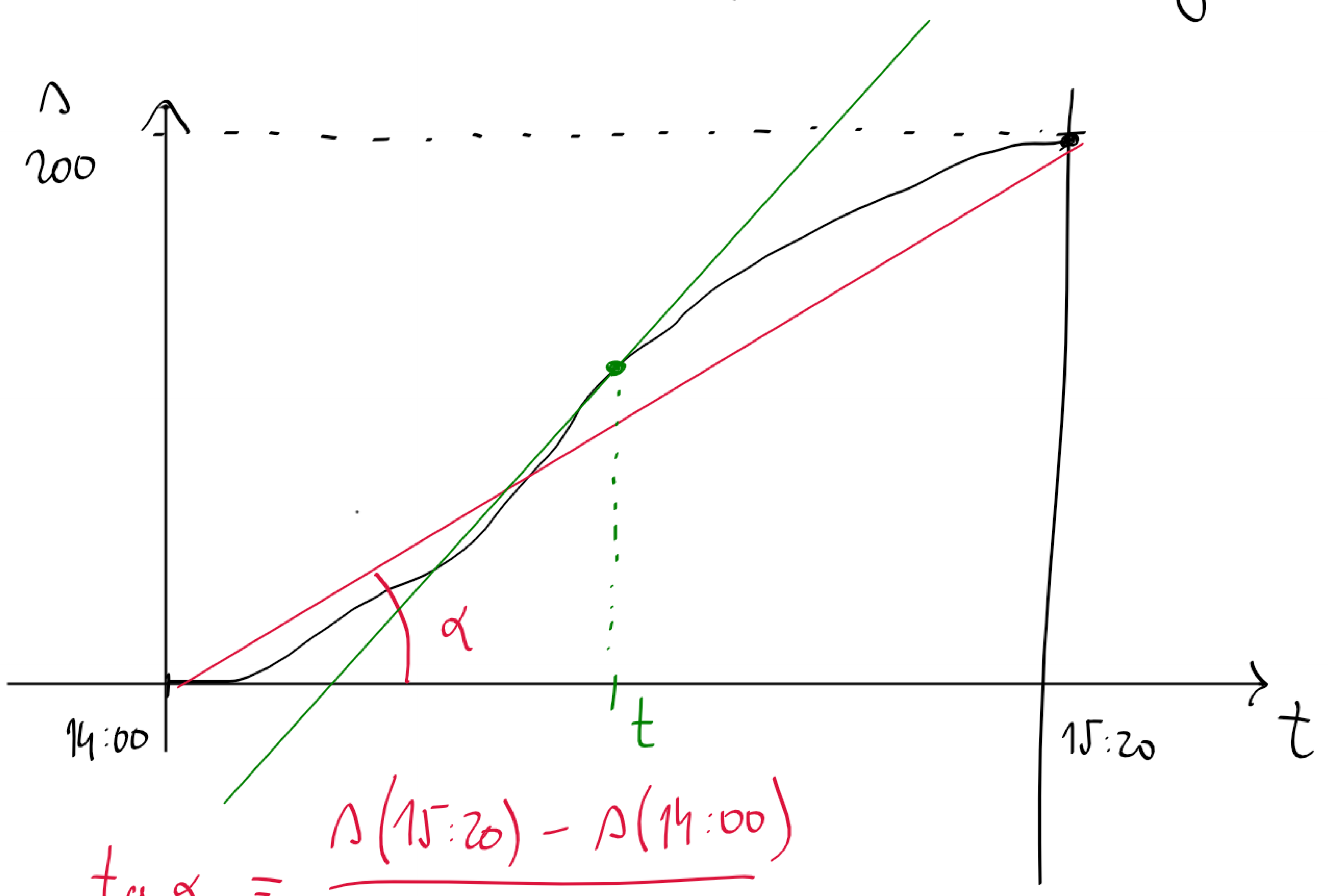
Jak policista dokáže šoférovi MT, že porušil předpisy: Policista aplikuje Lagrangeovu větu: $\exists\, \xi \in (14{:}00,\ 15{:}20)$:

$$s'(\xi) = \frac{s(15{:}20) - s(14{:}00)}{15{:}20 - 14{:}00} = 150 \text{ km}\cdot h^{-1}.$$

$s' = v$, tj. $v(\xi) = 150 \text{ km}\cdot h^{-1} > 130 \text{ km}h^{-1}$

$\Longrightarrow$ nárez bodik.

$s' = v$: Průměrná vs. okamžitá rychlost.



$$\bar{v} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{s(15{:}20) - s(14{:}00)}{15{:}20 - 14{:}00}$$

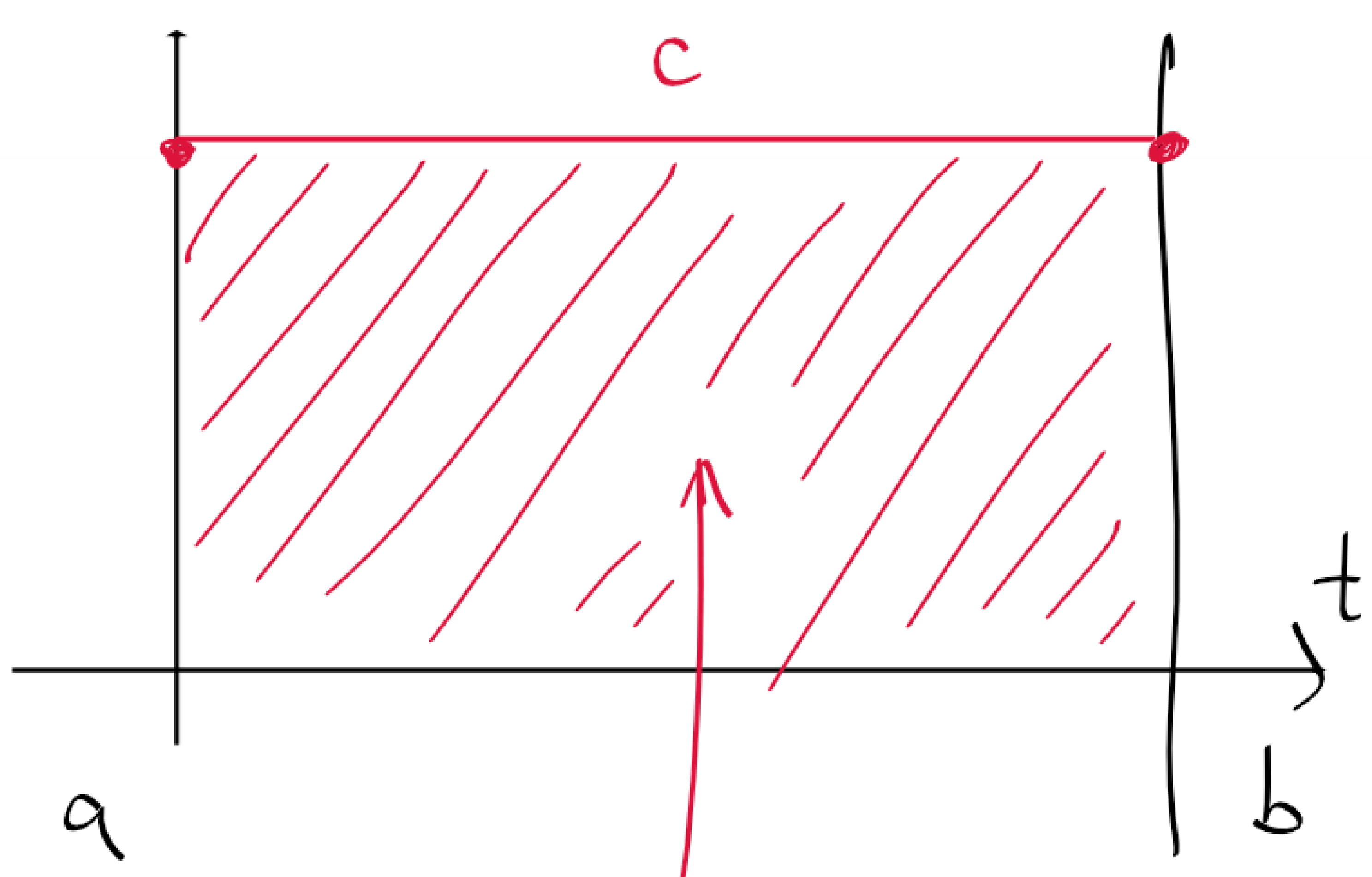
$v(t)$ = „směrnice tečny" ... je limita směrnic sečen přes kratší a kratší časové intervaly „kolem času t".

Vidíme: $\dfrac{ds}{dt} = v$.

Riemannův integrál & průměrná h. fce

0) Konstantní fce:

$f(x) = c, \quad x \in (a,b)$



$P(f,[a,b]) = c$

je jasné

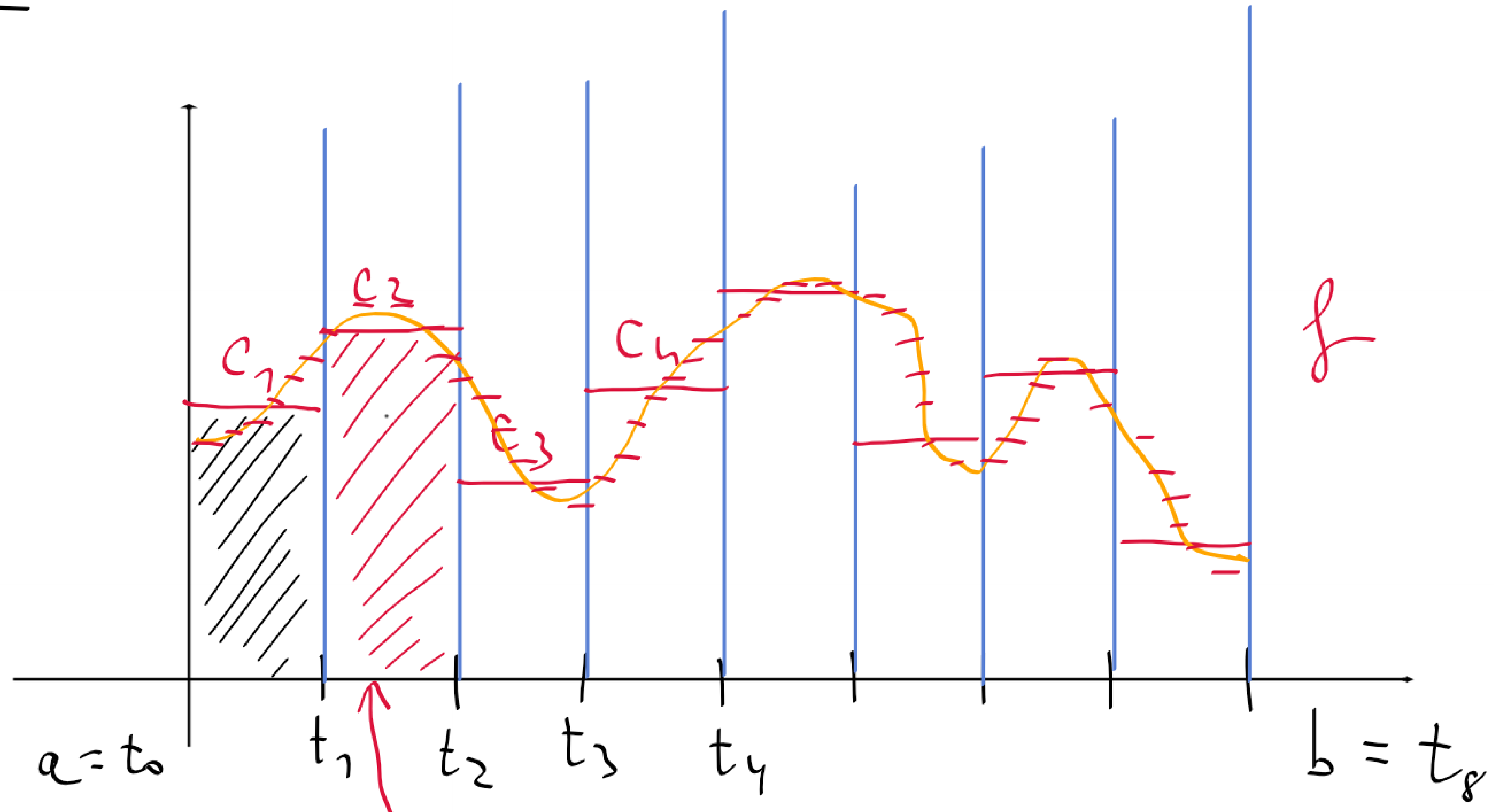
$$P(f,[a,b]) = c = \frac{1}{b-a} \cdot c\cdot(b-a) =$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b c\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

1) Po částech konstantní funkce s ekvidistantním dělením na $[a,b]$

$$D = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$$

takové dělení, že $t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, $i = 1,\dots,n$.



$$\bar{f} = P(f,[a,b]) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} c_i =$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \, c_i \cdot (t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{8}}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} c_i\,(t_i - t_{i-1}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

2) Tato úvaha $\longrightarrow \infty$ (počet dílků):

$$P(f,[a,b]) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f$$

pro libovolnou f spojitou na $[a,b]$.

Proč je tedy N.-L. fle jasná? TOPOL:

$$P(v, [14{:}00, 15{:}20]) = \frac{1}{15{:}20 - 14{:}00} \int_{14:00}^{15:20} v(t)\, dt$$

TO VÍME, je to „jasné".

Předtím jsme si rozmysleli, že

$$P(v, [14{:}00, 15{:}20]) = \bar{v} = \frac{s(15{:}20) - s(14{:}00)}{15{:}20 - 14{:}00}$$

Celkem:

$$\cancel{\frac{1}{15{:}20 - 14{:}00}} \int_{14:00}^{15:20} v(t)\, dt = \frac{s(15{:}20) - s(14{:}00)}{\cancel{15{:}20 - 14{:}00}}$$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a), \text{ kde } F' = f.$$

Tj.

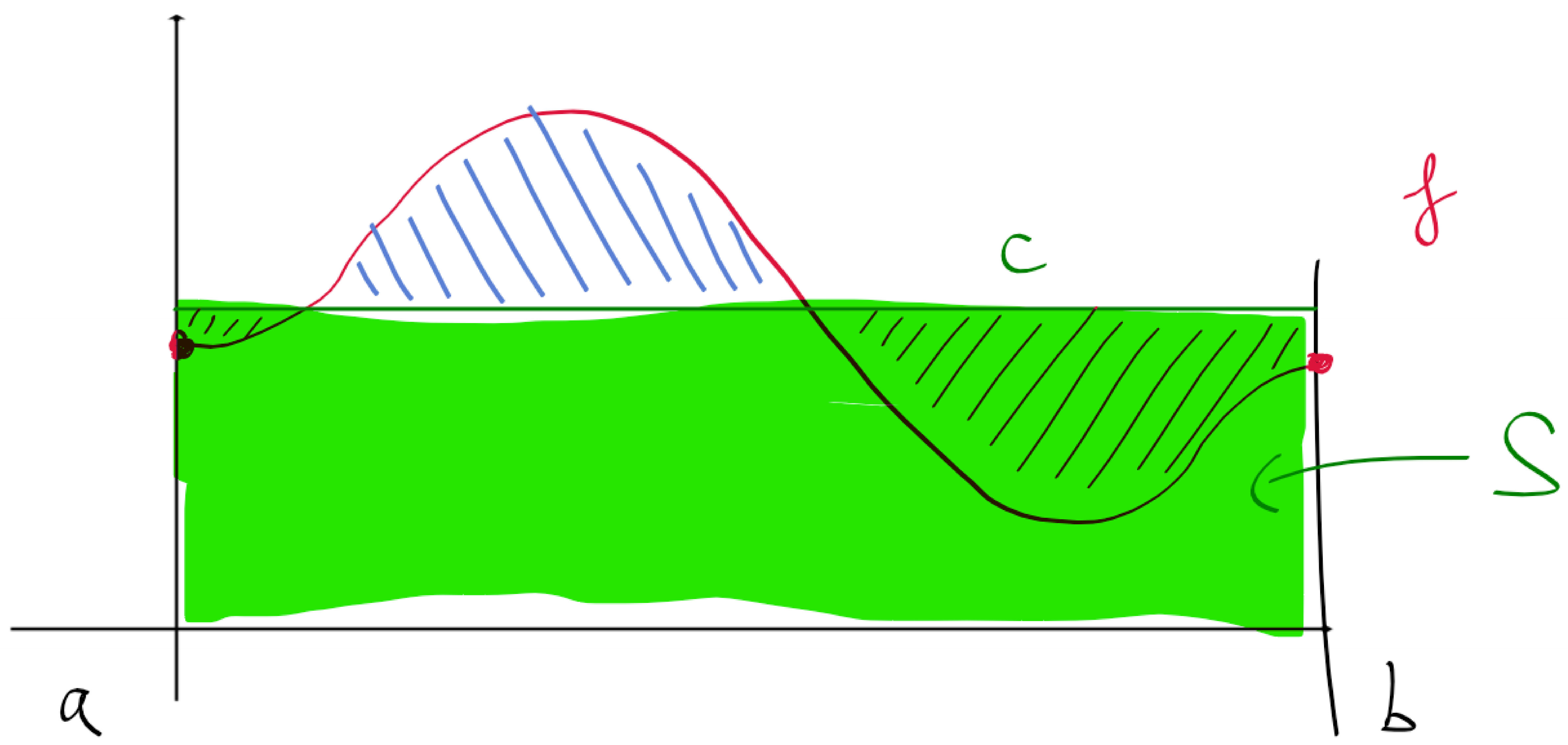
$$\int_{14:00}^{15:20} s'(t)\, dt = s(15{:}20) - s(14{:}00).$$

TO JE N.-L. FLE !

3 INGR: • $v = s'$

- průměrná rychlost: „$\dfrac{\text{dráha}}{\text{čas}}$"
- průměrná hodnota fce pomocí $(R)\int_a^b \ldots$

Průměrná hodnota fce pomocí (R) $\int_a^b$:



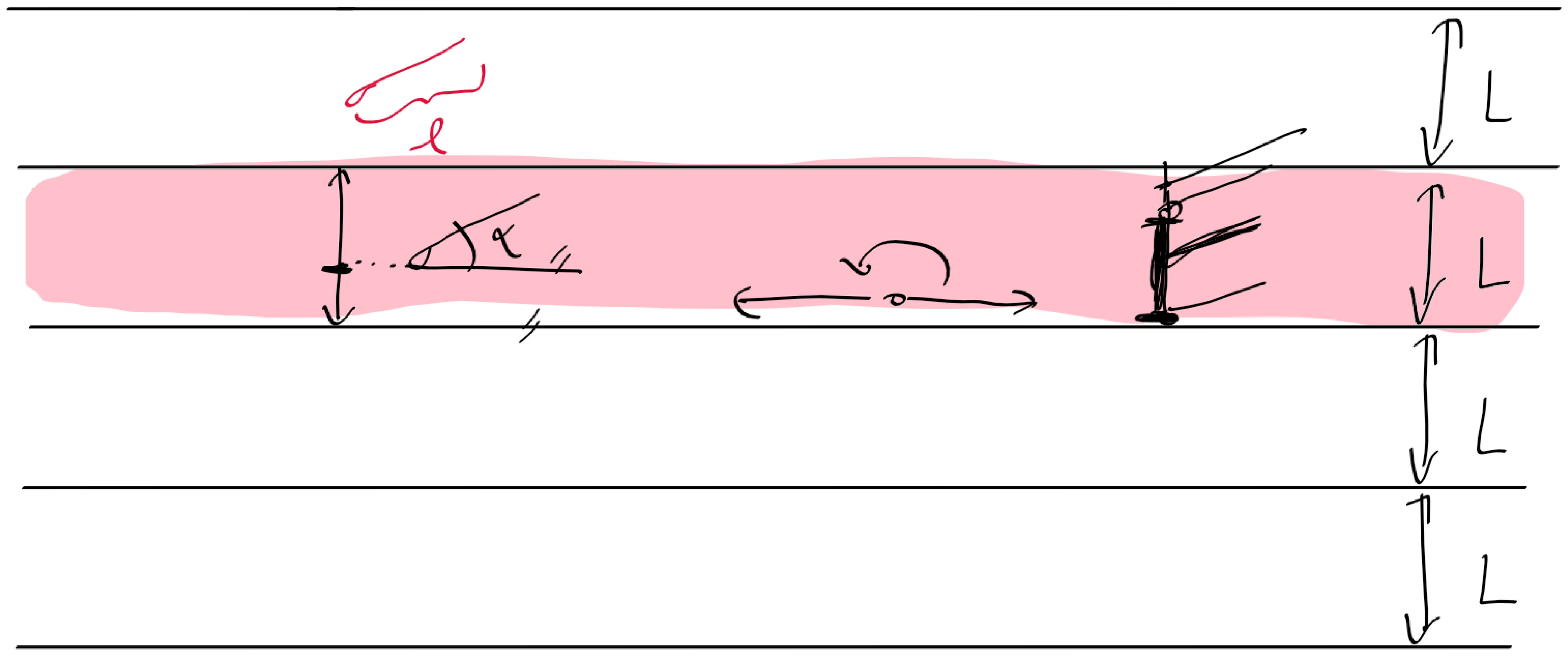
Konstantní fce, která „nejlépe“ aproximuje f? necht $S(\text{modrá}) = S(\text{červená})$.

Takto by měla být L: $P(f,[a,b])=c$.

$$S = c\cdot(b-a) = \int_a^b f.$$

Tedy $P(f,[a,b]) = c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f.$

Buffonův pokus s jehlou



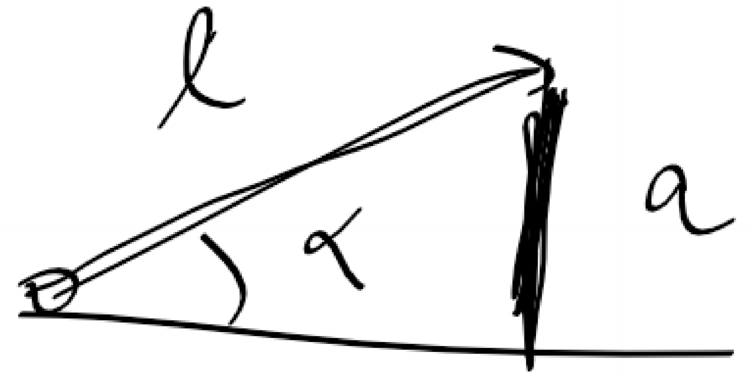
Délka jehly $l < L$, vzdálenost sous. přímek

Jaká je prst, že náhodně vržená jehla protne některou přímku?

Úvahy: 1) Je jedno ve kterém pásu skončí oko jehly („bod")

2) BÚNO oko je vždy níže a úhel α je v intervalu $[0, 180°) = [0, \pi)$.

Pro pevný úhel α, jaká je prst protnutí horní přímky.

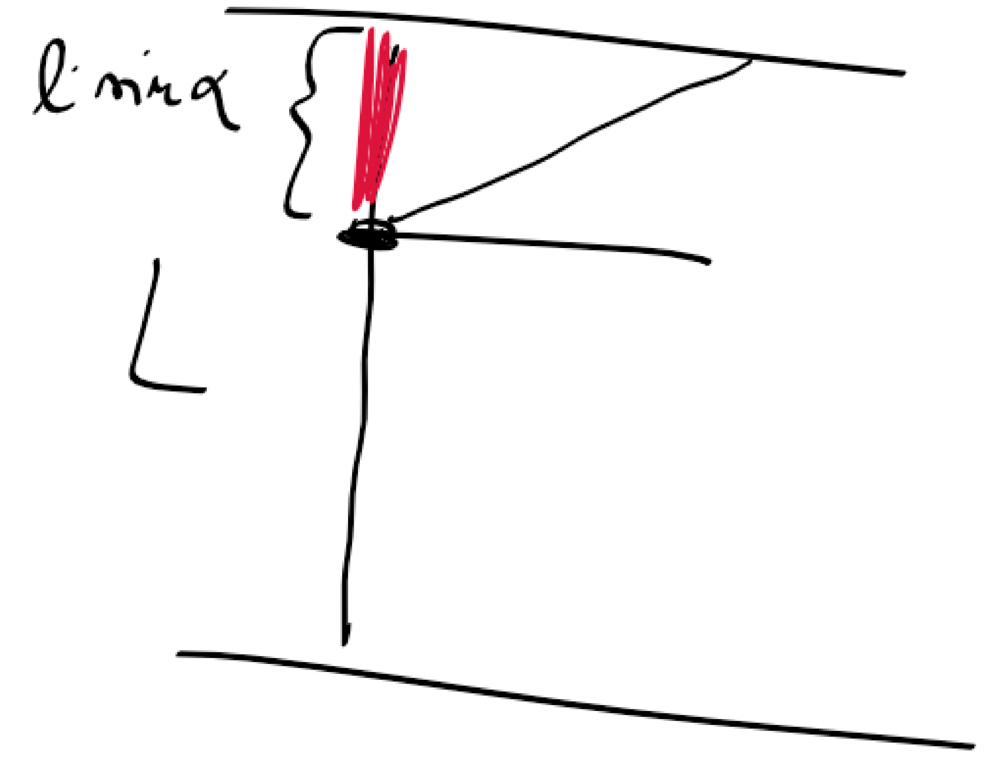


$$\frac{a}{l} = \sin\alpha$$

$$a = l \cdot \sin\alpha$$

Interval má délku L a jeho část délky $l \cdot \sin\alpha$ odpovídá protnutí.

$$P(\text{protnutí} \mid \alpha) = \frac{l \cdot \sin\alpha}{L}$$



průměrná h.

$$P(\text{protnutí}) = \bar{P}\Big(P(\text{protnutí} \mid \alpha), [0, \pi)\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{l \cdot \sin\alpha}{L}\, d\alpha = \frac{l}{L \cdot \pi}\int_0^{\pi} \sin\alpha = \frac{2l}{L \cdot \pi}$$

Pro velký počet pokusů N platí,

$$\frac{\#\text{ případů protnutí z N pokusů}}{N}$$

$$\approx P(\text{protnutí}) = \frac{2l}{L\pi}$$

$$\pi = \frac{2l}{L \cdot P(\text{prot.})} \doteq \frac{2l \cdot N}{L \cdot (\#\text{ protnutí z N pokusů})}$$

N velké